11 класс

(профильный уровень)

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

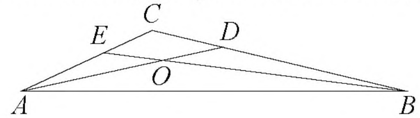
1 Найдите корень уравнения $\log_5(8+3x) = \log_5(7-3x)+1$.

Ответ: ____________________________.

2 Перед началом первого тура чемпионата по шахматам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 шахматистов, среди которых 10 спортсменов из России, в том числе Александр Ефимов. Найдите вероятность того, что в первом туре Александр Ефимов будет играть с каким-либо шахматистом из России.

Ответ: ____________________________.

3 В треугольнике ABC угол C равен 138°, AD и BE — биссектрисы, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.

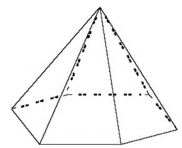


Ответ: ____________________________.

4 Найдите значение выражения $20\sqrt{3}\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

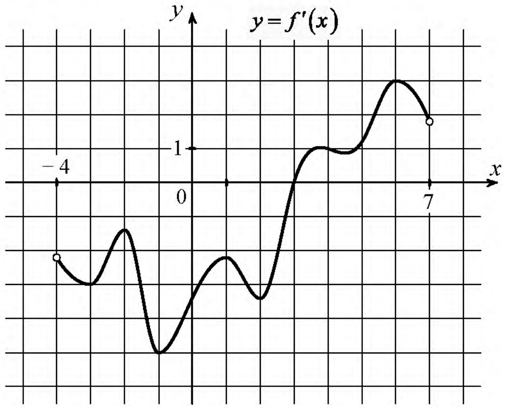
Ответ: ____________________________.

5 Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 18, боковые рёбра равны 41. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.



Ответ: ____________________________.

6 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 7)$. В какой точке отрезка $[-3; 1]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: ____________________________.

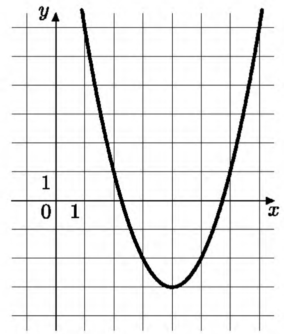
7 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 2 + 14t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте больше 10 метров?

Ответ: ____________________________.

8 Первый и второй насосы, работая совместно, наполняют бассейн за 180 минут, второй и третий — за 210 минут, а первый и третий — за 280 минут. За сколько минут эти три насоса, работая совместно, заполнят бассейн?

Ответ: ____________________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c целые. Найдите $f(-1)$.



Ответ: ____________________________.

10 Платежный терминал в течение рабочего дня может выйти из строя. Вероятность этого события 0,04. В торговом центре независимо друг от друга работают два таких платёжных терминала. Найдите вероятность того, что хотя бы один из них в течение рабочего дня будет исправен.

Ответ: ____________________________.

11 Найдите наибольшее значение функции $y = 2\sqrt{2}\sin x - 2x + 0{,}5\pi + 21$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: ____________________________.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\operatorname{tg} x - \sin x + \cos x = 1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

13 Основанием пирамиды $SABCD$ является квадрат $ABCD$. Высота пирамиды проходит через точку D, M — середина бокового ребра SC. Угол между прямыми AM и BC равен $60°$.

а) Докажите, что $SD:CD = \sqrt{11}$.

б) Найдите расстояние от точки D до плоскости ABS, если сторона основания пирамиды равна $4\sqrt{33}$.

14 Решите неравенство $\left(\frac{1}{x^2-9x+18} - \frac{x-3}{6-x}\right)\sqrt{x^3-11x^2+30x} \le 0$.

15 По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 9 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 7 % в первый год и на целое число n процентов во второй год. Найдите наименьшее значение n, при котором за два года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных вкладов.

16 Прямая, проходящая через середину M стороны $\boldsymbol{BC}$ треугольника $\boldsymbol{ABC}$, пересекает сторону $\boldsymbol{AC}$ в точке $\boldsymbol{K}$, причём $\angle CMK = \angle BAC$.

а) Докажите, что $\angle \boldsymbol{BAM} = \angle \boldsymbol{BKM}$.

б) Найдите медиану MN треугольника CKM, если $BC = 12$, $AB = \sqrt{41}$, $CK = 8$.

17 Найдите все **положительные** значения a, при каждом из которых уравнение

$$2a^x \cdot \log_2^2|a-3| = a^{2x} + 1$$

имеет хотя бы одно решение.

18 На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 165. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел?

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 5 раз больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.